

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ADOLF HAIMOVICI”**

**ETAPA LOCALĂ**

**8 februarie 2020**

**BAREM**

**CLASA A X-A**

**(3 ore/săptămână)**

<b>1.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
<b>a)</b>	<p>Notăm <math>\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = t</math></p> <p>Ridicând la puterea a 3-a obținem <math>x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = t^3</math></p> <p>Cum <math>x + y = 14</math> și <math>xy = -1</math> obținem <math>t^3 = 14 - 3t</math></p> <p><math>(t - 2)(t^2 + 2t + 7) = 0</math> de unde obținem <math>t = 2</math></p>	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>2p</b></p>
<b>b)</b>	$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}{x + y} = \frac{1}{7} \in \mathbb{Q}.$	<b>3p</b>

  

<b>2.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
<b>a)</b>	<p>Avem <math>\sqrt{5} &lt; 4 &lt; 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{\sqrt{5}} &lt; 2 &lt; \sqrt{5}</math></p> <p>Cum <math>\sqrt{\sqrt{5}} = 5^{\frac{1}{4}}</math>, respectiv <math>\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}</math> obținem <math>5^{\frac{1}{4}} &lt; 2 &lt; 5^{\frac{1}{2}}</math></p> <p>Funcția <math>f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>f(x) = \log_5 x</math> fiind strict crescătoare obținem:</p> <p><math>\log_5 5^{\frac{1}{4}} &lt; \log_5 2 &lt; \log_5 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{4} &lt; \log_5 2 &lt; \frac{1}{2}</math></p>	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p>
<b>b)</b>	<p><math>A = \frac{\log_5 4 + 1}{2} = \frac{2\log_5 2 + 1}{2}</math></p> <p><math>B = \frac{\log_5 64}{\log_5 80} = \frac{\log_5 2^6}{\log_5 2^4 + \log_5 5} = \frac{6\log_5 2}{4\log_5 2 + 1}</math></p> <p><math>A - B = \frac{2\log_5 2 + 1}{2} - \frac{6\log_5 2}{4\log_5 2 + 1} = \frac{8(\log_5 2)^2 - 6\log_5 2 + 1}{2(4\log_5 2 + 1)} = \frac{(2\log_5 2 - 1)(4\log_5 2 - 1)}{2(4\log_5 2 + 1)}</math></p> <p>Cum <math>\frac{(2\log_5 2 - 1)(4\log_5 2 - 1)}{2(4\log_5 2 + 1)} &lt; 0</math> pentru <math>\log_5 2 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)</math> obținem <math>A &lt; B</math></p>	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>1p</b></p>

  

<b>3.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
<b>a)</b>	<p><math>E(1-x) + E(x) =</math></p> <p><math>= \frac{6}{9^{1-x} + 3} + \frac{6}{9^x + 3} = \frac{2 \cdot 9^x}{3 + 9^x} + \frac{6}{9^x + 3} =</math></p> <p><math>= 2</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>1p</b></p>
<b>b)</b>	<p>Grupând convenabil și folosind punctul a) obținem</p> <p><math>E(-49) + E(50) = E(-48) + E(49) = \dots = E(0) + E(1) = 2</math></p> <p><math>\Rightarrow E(-49) + E(-48) + \dots + E(50) = \underbrace{2 + 2 + \dots + 2}_{50\text{-ori}} = 50 \cdot 2 = 100</math></p>	<p><b>3p</b></p> <p><b>1p</b></p>

<b>4.)</b>	<b>Din oficiu</b>	<b>1p</b>
<b>a)</b>	$\frac{a-i}{1+ai} = \frac{(a-i)(1-ai)}{(1+ai)(1-ai)} = \frac{a-i-a^2i-a}{1+a^2} = \frac{-i(1+a^2)}{1+a^2} = -i$ <p>Analog se arată că <math>\frac{a+i}{1-ai} = i</math></p> <p>Atunci <math>\left(\frac{a-i}{1+ai}\right)^{4n} + \left(\frac{a+i}{1-ai}\right)^{4n} = (-i)^{4n} + i^{4n} = 2i^{4n} \stackrel{i^4=1}{=} 2</math></p>	<p><b>2p</b></p> <p><b>2p</b></p> <p><b>1p</b></p>
<b>b)</b>	<p><math>z = a+ib, \ a, b \in \mathbb{R}.</math></p> $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{(a-2)^2+b^2} = 2$ <p>Rezultă că <math>a=1, \ b=\pm\sqrt{3}.</math></p> <p>Deci <math>z_1=1+i\sqrt{3}, z_2=1-i\sqrt{3}.</math></p>	<p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p> <p><b>1p</b></p>